

§ Inclusão das interações:

gases imperfeitos e

líquidos quânticos

0

A maneira mais simples de incluir as interações consiste em introduzir 'campos médios' ou 'campos efetivos' que 'mimicam' as interações entre as partículas através de potenciais de 1-partícula (esse problema, em princípio sabemos resolver). Em geral, esses métodos são variacionais e autoconsistentes, resolvendo por métodos numéricos.

Para férmions, estudaremos a aproximação de Hartree-Fock, onde a função de onda é formulada como um determinante de Slater de orbitais de 1-partícula.

A forma do orbital é determinada variacionalmente, resolvendo as equações auto-consistentes de Hartree-Fock.

Para bósons, temos que determinar a 'função de onda' do condensado. Um tratamento de campo médio conduz à famosa equação de Gross-Pitaevskii.

Próxima etapa: Aperfeiçoar o Campo médio LB 1
para calcular o espectro das excitações de baixa energia
de um gás de bósons interagentes.

§2. Gas de Bose de 'Esferas duras' (melhor 'líquido').

Consideramos um gas real de Bose. O termo das interações é escrito em 2ª quantização como:

$$\mathcal{H}_I = \frac{1}{2} \int d^3x \int d^3x' \psi^\dagger(\vec{x}) \psi^\dagger(\vec{x}') V(\vec{x}-\vec{x}') \psi(\vec{x}') \psi(\vec{x})$$

Expandimos os campos em estados de ondas planas

$$\psi(\vec{x}) = \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \frac{1}{\sqrt{V}} a_{\vec{k}},$$

onde os $\vec{k}$ são obtidos das condições periódicas de contorno em uma caixa de volume V . A normalização é dada por

$$\int d^3x e^{i(\vec{k}-\vec{k}') \cdot \vec{x}} = V \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}$$

Expandimos $\mathcal{H}_I$ em operadores de criação e destruição:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_I &= \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}_1} \sum_{\vec{k}_2} \sum_{\vec{k}_3} \sum_{\vec{k}_4} a_{\vec{k}_1}^\dagger a_{\vec{k}_2}^\dagger a_{\vec{k}_3} a_{\vec{k}_4} \\ &\quad \frac{1}{V^2} \cdot \int d^3x \int d^3x' e^{-ik_1 \cdot x} e^{-ik_2 \cdot x'} V(x-x') e^{ik_3 \cdot x'} e^{ik_4 \cdot x} \end{aligned}$$

Precisamos avaliar a integral

$$I = \int d^3x \int d^3x' V(x-x') e^{i(k_4-k_1) \cdot x} e^{i(k_3-k_2) \cdot x'}$$

usamos a mudança de variáveis de jacobiano unitário

$$\begin{cases} \vec{p} \equiv \vec{x} - \vec{x}' , & \vec{x} = \vec{p} + \vec{\xi} \\ \vec{\xi} \equiv \vec{x}' , & \vec{x}' = \vec{\xi} \end{cases}$$

Assim

$$\begin{aligned} I &= \int d^3p \int d^3\xi V(\vec{p}) e^{i(\vec{k}_4 - \vec{k}_1) \cdot \vec{p}} e^{-i\vec{\xi} \cdot (\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_3 - \vec{k}_4)} \\ &= V \delta_{\vec{k}_1 + \vec{k}_2, \vec{k}_3 + \vec{k}_4} (2\pi)^{3/2} \mathcal{V}(\vec{k}_1 - \vec{k}_4) , \end{aligned}$$

onde $\mathcal{V}(\vec{k})$ é a transformada de Fourier de $V(\vec{x})$. Logo, o termo de interação pode ser escrito como:

$$\mathcal{H}_I = \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3, \vec{k}_4} \frac{1}{2V} (2\pi)^{3/2} \mathcal{V}(\vec{k}_1 - \vec{k}_4) \delta_{\vec{k}_1 + \vec{k}_2, \vec{k}_3 + \vec{k}_4} a_{\vec{k}_1}^\dagger a_{\vec{k}_2}^\dagger a_{\vec{k}_3} a_{\vec{k}_4} ,$$

de maneira que no Hamiltoniano (1), a constante G está ligada à transformada de Fourier

$$(2\pi)^{3/2} \mathcal{V}(\vec{k}_1 - \vec{k}_4) \rightarrow G$$

e tem dimensão [energia][volume]. Neste caso é

assumido que a transformada de Fourier é constante. A ct. G pode ser avaliada em termos dos parâmetros da esfera dura, supondo esse tipo de interação entre bósons. Consideramos apenas a situação de baixas energias (temperatura baixa):

a) No caso de baixas energias, $kR \ll 1$, onde R é o raio de esfera dura, o termo dominante para o espalhamento é esfericamente simétrico ($l=0$), com o deslocamento de fase dado por

$$\tan \delta_0 \approx \delta_0 = -kR$$

e a amplitude de espalhamento

$$f(\vec{k}, \vec{k}') = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{e^{i\delta_l} \sin \delta_l}{k} P_l(\cos \theta)$$

$$\approx \frac{e^{i\delta_0} \sin \delta_0}{k} \approx \frac{\delta_0}{k} = -R,$$

que não depende do ângulo de espalhamento $\theta = \angle(\vec{k}, \vec{k}')$. Para a seção eficaz, temos a fórmula

$$\sigma(\cos \theta) = |f(\vec{k}, \vec{k}')|^2 = R^2$$

e para a seção total de espalhamento

$$\sigma_T = \int_{4\pi} d\Omega \sigma(\theta, \varphi) = 4\pi R^2,$$

que é 4 vezes maior que a seção clássica. Para o caso de espalhamento por partículas idênticas tipo bósons, temos os efeitos de interferência construtiva causados pela simetrização do estado de duas partículas, com

$$f_{\text{Bósons}}(\vec{k}, \vec{k}') = 2f(\vec{k}, \vec{k}') = -2R$$

A amplitude de espalhamento $f(\vec{k}', \vec{k})$ é definida em termos da solução assintótica da eq. de Lipmann-Schwinger

$$\langle \vec{x} | \psi^{(+)} \rangle \longrightarrow \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left[e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + \frac{e^{ikr}}{r} f(\vec{k}', \vec{k}) \right],$$

obtendo:

$$f(\vec{k}', \vec{k}) = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right) \int d^3x' V(\vec{x}') e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{x}'} (2\pi)^{3/2} \psi^{(+)}(\vec{x}').$$

Na aproximação de mais baixa ordem:

$$\psi^{(+)}(\vec{x}') \longrightarrow \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}'},$$

de maneira que

$$\begin{aligned} f^{(0)}(\vec{k}', \vec{k}) &\longrightarrow -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right) \int d^3x' V(\vec{x}') e^{-i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{x}'} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right) (2\pi)^{3/2} \tilde{V}(\vec{k}' - \vec{k}) \\ &= -R \quad (\text{resultado dos 'phase shifts'}). \end{aligned}$$

Obtemos o resultado:

$$(2\pi)^{3/2} \tilde{V}(\vec{k}' - \vec{k}) = 4\pi \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right) R \longrightarrow G,$$

de maneira que a constante de acoplamento G da teoria fica

$$G = 2\pi R \left(\frac{\hbar^2}{m} \right).$$

O resultado anterior foi obtido para $kR \ll 1$, com a Transformada de Fourier do potencial sendo considerada como constante. Para casos realistas, devemos ter

$$\mathcal{V}(\vec{k}) \xrightarrow{|\vec{k}| \rightarrow \infty} 0,$$

e desde o ponto de vista físico é necessário introduzir um 'cutoff' Q_c na teoria. Isto pode ser entendido a través do chamado 'Teorema de Plancherel', que dá o resultado

$$\int d^3x |V(\vec{x})|^2 = \int d^3k |\mathcal{V}(k)|^2,$$

de maneira que se o potencial $V(\vec{x})$ tem alcance finito,

$$\int d^3x |V(\vec{x})|^2 < +\infty,$$

então $|\mathcal{V}(k)|^2$ deve ser integrável:

$$\int d^3k |\mathcal{V}(k)|^2 = \frac{|G|^2}{(2\pi)^3} 4\pi \int_0^{Q_c} k^2 dk = \frac{4}{3}\pi Q_c^3 \cdot \frac{|G|^2}{(2\pi)^3} < +\infty$$

b)

Tema/ Data

LB 6

Discutamos o estado fundamental de um 'líquido de Bose'. Com $G \equiv 0$, a $T = 0^\circ K$, temos o limite de um 'gás perfeito', com as N partículas no estado de $\vec{k} = 0$ (condensação de Bose-Einstein). Seja

$$|\varphi_0^N\rangle$$

o estado fundamental desse sistema,

$$a_0^\dagger a_0 |\varphi_0^N\rangle = N |\varphi_0^N\rangle.$$

No caso de incluirmos interações, $G \neq 0$, não todas as N partículas estarão no estado $\vec{k} = 0$. Seja N_0 o valor médio do número de partículas em $\vec{k} = 0$,

$$\begin{aligned} N &= N_0 + (N - N_0) \\ &= N_0 + n + (N - N_0 - n), \end{aligned}$$

onde o número n dá a flutuação. O novo estado fundamental para uma superposição do tipo

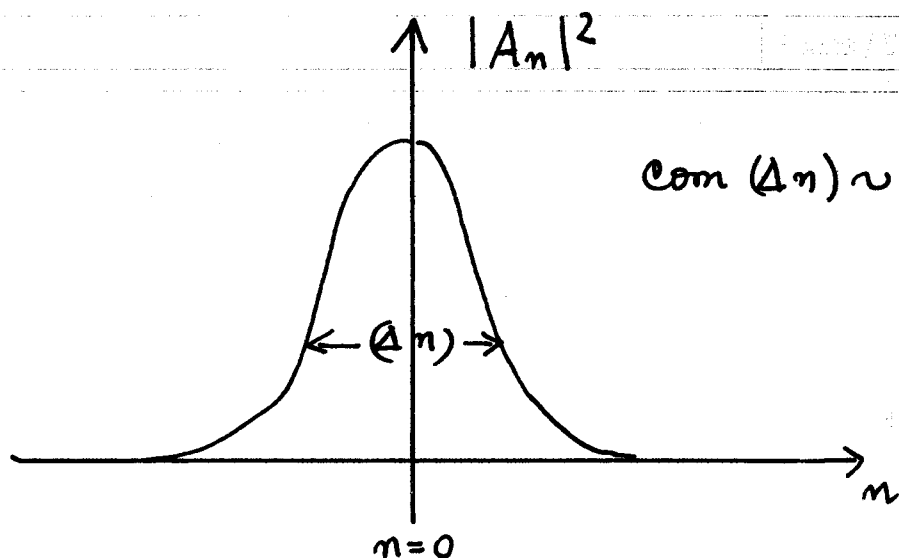
$$|\Psi_0^N\rangle = \sum_n A_n |\chi_e^{N-N_0-n}\rangle |\varphi_0^{N_0+n}\rangle, \quad (*)$$

onde $|\chi_e^{N-N_0-n}\rangle$ representa a ocupação de estado fora do condensado ($\vec{k} \neq 0$). Esperamos que para N, N_0 'muito grandes' (macroscópicos), as flutuações sejam pequenas,

$$N - N_0 \ll N,$$

$$\text{e} \quad n \ll N, \quad n \ll N_0,$$

com uma distribuição das probabilidades que qualitativamente tem a forma:



Para o estado fundamental (*) temos:

$$a_0 |\Psi_0^N\rangle = \sum_n A_n \sqrt{N_0+n} |\chi_e^{N-N_0-n}\rangle |\varphi_0^{N_0+n-1}\rangle,$$

$$a_0^\dagger |\Psi_0^N\rangle = \sum_n A_n \sqrt{N_0+n+1} |\chi_e^{N-N_0-n}\rangle |\varphi_0^{N_0+n+1}\rangle,$$

$$a_0^\dagger a_0 |\Psi_0^N\rangle = \sum_n A_n (N_0+n) |\chi_e^{N-N_0-n}\rangle |\varphi_0^{N_0+n}\rangle,$$

não sendo mais um autoestado do operador número $a_0^\dagger a_0$.
Mas se a ocupação N_0 for macroscópica e as flutuações forem pequenas

$$n \ll N_0, N,$$

podemos aproximar as equações acima por

$$a_0 |\Psi_0^N\rangle \approx \sqrt{N_0} |\Psi_0^N\rangle,$$

$$a_0^\dagger |\Psi_0^N\rangle \approx \sqrt{N_0} |\Psi_0^N\rangle,$$

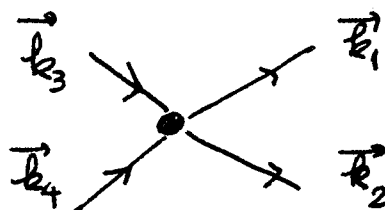
$$a_0^\dagger a_0 |\Psi_0^N\rangle \approx N_0 |\Psi_0^N\rangle.$$

Nesta aproximação, os operadores $(a_0, a_0^\dagger)$ podem ser substituídos simplesmente por números (caráter clássico).

Consideramos o estado de momentum nulo como tendo ocupação macroscópica. Supomos que (a_0, a_0^+) comutam e podem ser substituídos por números

$$a_0, a_0^+ \rightarrow \sqrt{N_0}$$

O Hamiltoniano de interação é expandido retendo os termos dominantes em N_0^2 e N_0 . Notamos que os processos de espalhamento entre bósons idênticos conservam o momentum



com $\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}_3 + \vec{k}_4$, de maneira que não existem termos com $N_0^{3/2}$, por exemplo.

i) Termos de ordem N_0^2 :

$$a_{\vec{k}_1}^+ a_{\vec{k}_2}^+ a_{\vec{k}_3} a_{\vec{k}_4} \rightarrow a_0^+ a_0^+ a_0 a_0 \rightarrow N_0^2$$

ii) Termos de ordem N_0 :

$$\left. \begin{array}{l} a_{\vec{k}}^+ a_0^+ a_{\vec{k}} a_0 \\ a_{\vec{k}}^+ a_0^+ a_0 a_{\vec{k}} \\ a_0^+ a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}} a_0 \\ a_0^+ a_{\vec{k}}^+ a_0 a_{\vec{k}} \end{array} \right\} \rightarrow 4 N_0 a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}}$$

$$a_k^+ a_{-k}^+ a_0 a_0 \rightarrow N_0 a_k^+ a_{-k}^+$$

$$a_0^+ a_0^+ a_k a_{-k} \rightarrow N_0 a_k a_{-k}$$

Introduzindo o símbolo $\sum_{\vec{k}}'$ que exclui o estado com

$\vec{k}=0$, e simetrizando em $\vec{k}$ e $-\vec{k}$, o Hamiltoniano de interação pode ser escrito como:

$$\mathcal{H}_I \approx \frac{G}{2V} \left[N_0^2 + 2N_0 \sum_{\vec{k}}' (a_k^+ a_k + a_{-k}^+ a_{-k}) + N_0 \sum_{\vec{k}}' (a_k^+ a_{-k}^+ + a_k a_{-k}) \right].$$

O operador número é dado por:

$$\hat{N} = N_0 + \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}}' (a_k^+ a_k + a_{-k}^+ a_{-k}).$$

Tomando médias sobre o estado fundamental temos

$$N = \langle \hat{N} \rangle = N_0 + \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}}' \langle a_k^+ a_k + a_{-k}^+ a_{-k} \rangle,$$

e sabemos que a flutuação do número é muito pequena

$$N - N_0 = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}}' \langle a_k^+ a_k + a_{-k}^+ a_{-k} \rangle \ll N$$

Fazemos a substituição:

$$N_0 = \hat{N} - \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} (a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}} + a_{-\vec{k}}^+ a_{-\vec{k}})$$

guardando termos até de ordem N , e negligenciando as flutuações. Temos:

$$N_0^2 \approx \hat{N}^2 - \hat{N} \sum_{\vec{k}} (a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}} + a_{-\vec{k}}^+ a_{-\vec{k}})$$

$$\begin{aligned} e \quad \frac{G}{2V} N_0^2 &\rightarrow \frac{G}{2V} \hat{N}^2 - \frac{G}{2V} \hat{N} \sum_{\vec{k}} (a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}} + a_{-\vec{k}}^+ a_{-\vec{k}}) \\ &= \frac{1}{2} G n^2 V - \frac{1}{2} G n \sum_{\vec{k}} (a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}} + a_{-\vec{k}}^+ a_{-\vec{k}}) \end{aligned}$$

com $n = N/V$.

Em total:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_I &= \frac{1}{2} G n^2 V + \frac{1}{2} G n \sum_{\vec{k}} (a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}} + a_{-\vec{k}}^+ a_{-\vec{k}}) \\ &\quad + \frac{1}{2} G n \sum_{\vec{k}} (a_{\vec{k}}^+ a_{-\vec{k}}^+ + a_{\vec{k}} a_{-\vec{k}}). \end{aligned}$$

Para o Hamiltoniano livre temos

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{\vec{k}} \epsilon_{\vec{k}}^{(0)} a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}} =$$

$$= \epsilon_0^{(0)} a_0^\dagger a_0 + \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}}' \epsilon_k^{(0)} (a_k^\dagger a_k + a_{-\vec{k}}^\dagger a_{-\vec{k}}),$$

onde temos assumido que $\epsilon_{-\vec{k}}^{(0)} = \epsilon_k^{(0)}$

$$\mathcal{H}_0 \approx \epsilon_0^{(0)} V n + \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}}' \epsilon_k^{(0)} (a_k^\dagger a_k + a_{-\vec{k}}^\dagger a_{-\vec{k}}),$$

de maneira que o Hamiltoniano completo pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \frac{1}{2} G n^2 V + \epsilon_0^{(0)} V n + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}}' (\epsilon_k^{(0)} + G n) (a_k^\dagger a_k + a_{-\vec{k}}^\dagger a_{-\vec{k}}) \\ & + \frac{1}{2} G n \sum_{\vec{k}}' (a_k^\dagger a_{-\vec{k}}^\dagger + a_k a_{-\vec{k}}) \end{aligned} \quad (2)$$

Se a relação de dispersão é do tipo de partícula livre:

$$\epsilon_{\vec{k}}^{(0)} = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m},$$

então $\epsilon_0^{(0)} = 0$. Vamos supor que este é o caso para eliminar uma constante no Hamiltoniano (2).

c) Diagonalização do Hamiltoniano (2)

No Hamiltoniano de interação temos acoplamento entre os modos $\vec{k}$ e $-\vec{k}$. Isto sugere uma transformação linear da forma:

$$\begin{cases} a_{\vec{k}} \equiv u_k a_{\vec{k}} - v_k a_{-\vec{k}}^+ , \\ a_{\vec{k}}^+ \equiv u_k a_{\vec{k}}^+ - v_k a_{-\vec{k}} , \end{cases}$$

onde assumimos os coeficientes (u_k, v_k) como sendo reais com

$$\begin{aligned} u_{-\vec{k}} &= u_{|\vec{k}|} \equiv u_k \\ v_{-\vec{k}} &= v_{|\vec{k}|} \equiv v_k \end{aligned}$$

A transformação que envolve os mesmos operadores e'

$$\begin{cases} a_{\vec{k}} = u_k a_{\vec{k}} - v_k a_{-\vec{k}}^+ , \\ a_{-\vec{k}}^+ = u_k a_{-\vec{k}}^+ - v_k a_{\vec{k}} , \end{cases}$$

e matricialmente:

$$\begin{pmatrix} a_{\vec{k}} \\ a_{-\vec{k}}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_k & -v_k \\ -v_k & u_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{\vec{k}} \\ a_{-\vec{k}}^+ \end{pmatrix}$$

Esta transformação pode ser invertida. Assumimos que o determinante da transformação é unitário

$$\det \begin{pmatrix} u_k & -v_k \\ -v_k & u_k \end{pmatrix} = u_k^2 - v_k^2 = 1$$

Assim a transformação inversa é:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{\vec{k}} \\ \alpha_{-\vec{k}}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_k & v_k \\ v_k & u_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\vec{k}} \\ a_{-\vec{k}}^+ \end{pmatrix}$$

Mostremos que a transformação preserva as relações de comutação:

$$\begin{aligned} [\alpha_{\vec{k}}, \alpha_{\vec{k}'}^+] &= [u_k a_{\vec{k}} + v_k a_{-\vec{k}}^+, u_{k'} a_{\vec{k}'}^+ + v_{k'} a_{-\vec{k}'}] \\ &= u_k u_{k'} \underbrace{[a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}^+]}_{\delta_{\vec{k}, \vec{k}'}} + v_k v_{k'} \underbrace{[a_{-\vec{k}}^+, a_{-\vec{k}'}]}_{-\delta_{\vec{k}, \vec{k}'}} \\ &= (u_k^2 - v_k^2) \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \end{aligned}$$

Também:

$$\begin{aligned} [\alpha_{\vec{k}}^+, \alpha_{\vec{k}'}] &= [u_k a_{\vec{k}}^+ + v_k a_{-\vec{k}}^-, u_{k'} a_{\vec{k}'} + v_{k'} a_{-\vec{k}'}^+] \\ &= u_k v_{k'} [a_{\vec{k}}^+, a_{-\vec{k}'}^+] + u_{k'} v_k [a_{-\vec{k}}^-, a_{\vec{k}}] \end{aligned}$$

$$= u_k v_k \delta_{\vec{k}, -\vec{k}} - u_k v_k \delta_{\vec{k}, -\vec{k}} = 0,$$

onde temos usado a propriedade $u_{-\vec{k}} = u_k = u_{|\vec{k}|}$.
Substituímos a transformação no Hamiltoniano (2):

$$\begin{aligned} a_k^\dagger a_k &= (u_k \alpha_k^\dagger - v_k \alpha_{-k}) (u_k \alpha_k - v_k \alpha_{-k}^\dagger) \\ &= u_k^2 \alpha_k^\dagger \alpha_k + v_k^2 \alpha_{-k} \alpha_{-k}^\dagger - u_k v_k \alpha_k^\dagger \alpha_{-k}^\dagger \\ &\quad - u_k v_k \alpha_{-k} \alpha_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{-k}^\dagger a_{-k} &= u_k^2 \alpha_{-k}^\dagger \alpha_{-k} + v_k^2 \alpha_k \alpha_k^\dagger - u_k v_k \alpha_{-k}^\dagger \alpha_k^\dagger \\ &\quad - u_k v_k \alpha_k \alpha_{-k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_k a_{-k} &= (u_k \alpha_k - v_k \alpha_{-k}^\dagger) (u_k \alpha_{-k} - v_k \alpha_k^\dagger) \\ &= u_k^2 \alpha_k \alpha_{-k} + v_k^2 \alpha_{-k}^\dagger \alpha_k^\dagger - u_k v_k \alpha_k \alpha_k^\dagger \\ &\quad - u_k v_k \alpha_{-k}^\dagger \alpha_{-k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_k^\dagger a_{-k}^\dagger &= u_k^2 \alpha_k^\dagger \alpha_{-k}^\dagger + v_k^2 \alpha_{-k} \alpha_k - u_k v_k \alpha_k^\dagger \alpha_k \\ &\quad - u_k v_k \alpha_{-k} \alpha_{-k}^\dagger \end{aligned}$$

Colocando os operadores em ordem normal:

- $$\begin{aligned}
 a_k^+ a_k + a_{-k}^+ a_{-k} &= u_k^2 (\alpha_k^+ \alpha_k + \alpha_{-k}^+ \alpha_{-k}) + 2v_k^2 \\
 &\quad + v_k^2 (\alpha_k^+ \alpha_k + \alpha_{-k}^+ \alpha_{-k}) - 2u_k v_k (\alpha_k^+ \alpha_{-k}^+ + \alpha_k \alpha_{-k}) \\
 &= 2v_k^2 + (u_k^2 + v_k^2) (\alpha_k^+ \alpha_k + \alpha_{-k}^+ \alpha_{-k}) - 2u_k v_k (\alpha_k^+ \alpha_{-k}^+ + \alpha_k \alpha_{-k})
 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}
 a_k^+ a_{-k}^+ + a_k a_{-k} &= -2u_k v_k - 2u_k v_k (\alpha_k^+ \alpha_k + \alpha_{-k}^+ \alpha_{-k}) \\
 &\quad + (u_k^2 + v_k^2) (\alpha_k^+ \alpha_{-k}^+ + \alpha_k \alpha_{-k})
 \end{aligned}$$

Escrevemos o Hamiltoniano (2) em termo dos operadores (α, α^+) :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H} &= \frac{1}{2} G n^2 V + \sum_{\vec{k}}' \left[v_k^2 (\epsilon_k^{(0)} + G n) - u_k v_k G n \right] + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}}' \left[(u_k^2 + v_k^2) (\epsilon_k^{(0)} + G n) - 2u_k v_k G n \right] \times \\
 &\quad \times (\alpha_k^+ \alpha_k + \alpha_{-k}^+ \alpha_{-k}) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}}' \left[(u_k^2 + v_k^2) G n - 2u_k v_k (\epsilon_k^{(0)} + G n) \right] \times \\
 &\quad \times (\alpha_k^+ \alpha_{-k}^+ + \alpha_k \alpha_{-k})
 \end{aligned}$$

Neste ponto, existem várias possibilidades para a diagonalização completa. Adotamos o tratamento

variacional. Calculamos a energia do estado fundamental. Ele é procurado como o vácuo dos novos operadores $\alpha_{\vec{k}}$:

$$\alpha_{\vec{k}} |0\rangle = 0, \text{ para todo } \vec{k}.$$

Seja:

$$W = \langle 0 | \mathcal{H} | 0 \rangle = \frac{1}{2} G n^2 V + \sum_{\vec{k}}' \left[v_k^2 (\epsilon_k^{(0)} + G n) - u_k v_k G n \right],$$

onde supomos que $\langle 0 | 0 \rangle = 1$. Lembramos que os coeficientes (u_k, v_k) satisfazem as condições

$$u_k^2 - v_k^2 = 1, \text{ para todo } \vec{k} \neq 0.$$

Assim, minimizamos o funcional:

$$F = W + \sum_{\vec{k}}' \lambda_k (u_k^2 - v_k^2)$$

$$F = \frac{1}{2} G n^2 V + \sum_{\vec{k}}' \left[v_k^2 (\epsilon_k^{(0)} + G n) - u_k v_k G n \right] + \sum_{\vec{k}}' \lambda_k (u_k^2 - v_k^2),$$

onde os $\lambda_{\vec{k}}$ são os multiplicadores de Lagrange associados com a condição $u_k^2 - v_k^2 = 1$.

$$I) \frac{\partial F}{\partial u_k} = 0 = -Gn v_k + 2\lambda_k u_k$$

$$II) \frac{\partial F}{\partial v_k} = 0 = 2\sigma_k(\epsilon_k^{(0)} + Gn) - u_k Gn - 2\lambda_k v_k$$

obtemos as equações lineares homogêneas para (u_k, v_k)

$$\begin{cases} -2\lambda_k u_k + Gn v_k = 0 \\ -Gn u_k + 2(\epsilon_k^{(0)} + Gn - \lambda_k) v_k = 0 \end{cases} \quad (4)$$

As eqs. (4) só tem solução não trivial quando o determinante do sistema é nulo:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2\lambda_k & Gn \\ -Gn & 2(\epsilon_k^{(0)} + Gn) - 2\lambda_k \end{vmatrix} =$$

$$= 4\lambda_k^2 - 4\lambda_k(\epsilon_k^{(0)} + Gn) + (Gn)^2$$

ou

$$\lambda^2 - \lambda(\epsilon_k^{(0)} + Gn) + (Gn)^2/4 = 0,$$

que é a equação para os autovalores

Soluções:

$$\lambda_{\pm} = \frac{\epsilon_k^{(0)} + Gn}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\epsilon_k^{(0)} + Gn)^2 - (Gn)^2}$$

Da 1ª equação de (4) temos:

$$v_k = \frac{2\lambda_k}{Gn} u_k$$

Os sinais das soluções $\lambda_{\pm}$ são decididos tomando o limite de altas energias. Como os processos de espalhamento implicam baixas energias, esperamos que as quasipartículas se comportem como partículas livres no limite de altas energias. Assim para $\epsilon_k^{(0)} \rightarrow \infty$, devemos ter $u_k \rightarrow 1$, $v_k \rightarrow 0$ (notar que (u, v) não podem ser simultaneamente nulos porque $u^2 - v^2 = 1$).

Das expressões de acima temos:

$$\begin{aligned} v_k &= \frac{\epsilon_k^{(0)} + Gn \pm \sqrt{\epsilon_k^{(0)2} + 2\epsilon_k^{(0)}Gn}}{Gn} \\ &= \frac{\epsilon_k^{(0)} + Gn \pm \epsilon_k^{(0)} \sqrt{1 + 2Gn/\epsilon_k^{(0)}}}{Gn} \\ &\underset{\epsilon \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\epsilon_k^{(0)} + Gn \pm \epsilon_k^{(0)} (1 + Gn/\epsilon_k^{(0)})}{Gn} \end{aligned}$$

com $v_k \rightarrow 0$, só para λ_- . A solução é

$$\lambda_k = \frac{\epsilon_k^{(0)} + Gn}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\epsilon_k^{(0)} + Gn)^2 - (Gn)^2}$$

Das eqs. (4), multiplicando a primeira por v_k e a segunda por u_k , e tirando a 2ª da 1ª, obtemos:

$$(4) \quad \begin{cases} -2\lambda_k u_k v_k + Gn v_k^2 = 0 \\ -Gn u_k^2 + 2(\epsilon_k^{(0)} + Gn - \lambda_k) u_k v_k = 0 \end{cases}$$

$$0 = Gn(u_k^2 + v_k^2) - 2u_k v_k (\epsilon_k^{(0)} + Gn), \quad (5)$$

de maneira que o termo não diagonal de (3) cancela-se automaticamente (ou seja, diagonalização!). A relação $u^2 - v^2 = 1$, sugere a parametrização:

$$u_k = \cosh \varphi_k, \quad v_k = \sinh \varphi_k,$$

com a relação

$$\tanh 2\varphi_k = \frac{2 \tanh \varphi_k}{1 + \tanh^2 \varphi_k} = \frac{2 u_k v_k}{u_k^2 + v_k^2}$$

$$-1 \leq \tanh 2\varphi_k = \frac{Gn}{\epsilon_k^{(0)} + Gn} \leq 1$$

Esta última equação só tem solução em geral para $G > 0$. Só falta avaliar a energia das quase-partículas E_k . Da expressão do Hamiltoniano (3) temos:

$$E_k = (u_k^2 + v_k^2)(\epsilon_k^{(0)} + Gn) - 2u_k v_k Gn$$

Somando as duas eqs. de (4') obtemos

$$-Gn \underbrace{(u_k^2 - v_k^2)}_1 + 2u_k v_k (\epsilon_k^{(0)} + Gn - 2\lambda_k) = 0,$$

o que fornece $2u_k v_k = \frac{Gn}{\epsilon_k^{(0)} + Gn - 2\lambda_k},$

logo

$$u_k^2 + v_k^2 = \frac{\epsilon_k^{(0)} + Gn}{Gn} 2u_k v_k = \frac{\epsilon_k^{(0)} + Gn}{\epsilon_k^{(0)} + Gn - 2\lambda_k}$$

e substituindo em E_k da':

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{(\epsilon_k^{(0)} + Gn)^2}{\epsilon_k^{(0)} + Gn - 2\lambda_k} - \frac{(Gn)^2}{\epsilon_k^{(0)} + Gn - 2\lambda_k} \\ &= \frac{(\epsilon_k^{(0)} + Gn)^2 - (Gn)^2}{\epsilon_k^{(0)} + Gn - 2\lambda_k} \end{aligned}$$

e finalmente:

$$\epsilon_k^{(0)} + Gn - 2\lambda_k = \sqrt{(\epsilon_k^{(0)} + Gn)^2 - (Gn)^2},$$

e a relação de dispersão para as quase-partículas:

$$E_k = \sqrt{(\epsilon_k^{(0)} + Gn)^2 - (Gn)^2} \quad (6)$$

d) Para a energia do estado fundamental e para o cálculo do número $(N - N_0)/N$ precisamos de v_k^2 .

Temos as equações:

$$\begin{cases} u_k^2 + v_k^2 = \frac{\epsilon_k^{(0)} + Gn}{E_k} \\ u_k^2 - v_k^2 = 1 \end{cases},$$

que fornecem

$$2v_k^2 = \frac{\epsilon_k^{(0)} + Gn}{E_k} - 1$$

Para o estado fundamental:

$$\begin{aligned} v_k^2 (\epsilon_k^{(0)} + Gn) - u_k v_k Gn &= \frac{(\epsilon_k^{(0)} + Gn)(\epsilon_k^{(0)} + Gn - E_k)}{2E_k} \\ - \frac{(Gn)^2}{2E_k} &= \frac{(\epsilon_k^{(0)} + Gn)^2 - (Gn)^2 - E_k (\epsilon_k^{(0)} + Gn)}{2E_k} \end{aligned}$$

In[1]:=

$$\text{pvk}[x_] = \frac{1+x}{2\sqrt{1+2x}} - 1/2$$

$$\text{Out}[1] = -\frac{1}{2} + \frac{1+x}{2\sqrt{1+2x}}$$

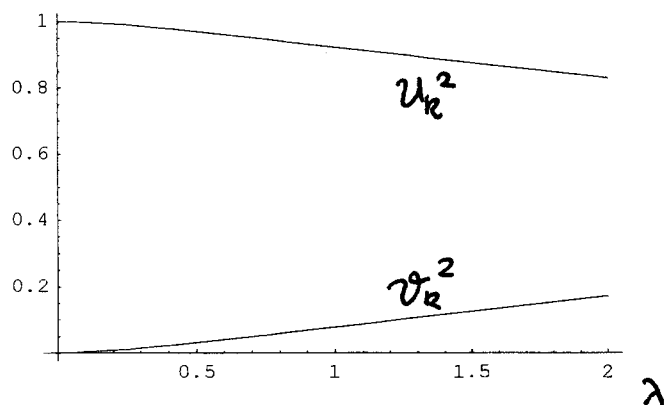
In[3]:=

$$\text{puk}[x_] = 1 - \text{pvk}[x]$$

$$\text{Out}[3] = \frac{3}{2} - \frac{1+x}{2\sqrt{1+2x}}$$

In[9]:=

Plot[{pvk[x], puk[x]}, {x, 0.0, 2.0}]



Out[9]= - Graphics -

$$\lambda \equiv \frac{G\eta}{\mathcal{E}_R^{(0)}}$$

$$= \frac{E_k - (\epsilon_k^{(0)} + G_n)}{2}$$

e para $E_0 = \langle 0 | \mathcal{H} | 0 \rangle$

$$E_0 = \frac{1}{2} G n^2 V - \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}}' [\epsilon_k^{(0)} + G_n - E_k] \quad , \quad (7)$$

que diverge sem a introdução de um "cutoff" no espaço $\vec{k}$.

Temos:

$$\begin{aligned} \hat{N} &= N_0 + \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}}' (a_k^+ a_k + a_{-\vec{k}}^+ a_{-\vec{k}}) \\ &= N_0 + \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}}' \left[2v_k^2 + (u_k^2 + v_k^2) (\alpha_k^+ \alpha_k + \alpha_{-\vec{k}}^+ \alpha_{-\vec{k}}) - \right. \\ &\quad \left. - 2u_k v_k (\alpha_k^+ \alpha_{-\vec{k}}^+ + \alpha_{\vec{k}} \alpha_{-\vec{k}}) \right] \end{aligned}$$

e tomando médias com o estado fundamental:

$$N = \langle \hat{N} \rangle = \langle 0 | \hat{N} | 0 \rangle = N_0 + \sum_{\vec{k}}' v_k^2$$

ou

$$\frac{N - N_0}{N} = \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}}' v_k^2 = \frac{1}{2N} \sum_{\vec{k}}' \left[\frac{\epsilon_k^{(0)} + G_n}{E_k} - 1 \right]$$

que sim é finito. Tomando o limite contínuo obtemos

$$\frac{N - N_0}{N} = \frac{V}{2N} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\frac{\epsilon_k^{(0)} + Gn}{E_k} - 1 \right)$$

$$= \frac{V}{2N} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{1 + \epsilon_k^{(0)}/Gn}{\sqrt{\frac{\epsilon_k^{(0)2}}{(Gn)^2} + 2 \frac{\epsilon_k^{(0)}}{Gn}}} - 1 \right\}$$

$$\frac{\epsilon_k^{(0)}}{Gn} = \frac{\hbar^2}{2mGn} k^2 \equiv x^2$$

$$\Rightarrow k = \frac{(2mGn)^{1/2}}{\hbar} x$$

$$k^2 dk = \frac{(2mGn)^{3/2}}{\hbar^3} x^2 dx$$

Temos:

$$\frac{N - N_0}{N} = \frac{V}{2N} \frac{1}{(2\pi)^3} 4\pi \int_0^\infty k^2 dk \left\{ \frac{1+x^2}{\sqrt{x^4+2x^2}} - 1 \right\}$$

$$= \frac{V}{2N} \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \frac{(2mGn)^{3/2}}{\hbar^3} \int_0^\infty x^2 dx \left\{ \frac{1+x^2}{\sqrt{x^4+2x^2}} - 1 \right\}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2 n} \frac{(2mGn)^{3/2}}{\hbar^3} I,$$

com $I = \frac{\sqrt{2}}{3}$ (ver cálculo anexo com o "Mathematica")

In[1]:=

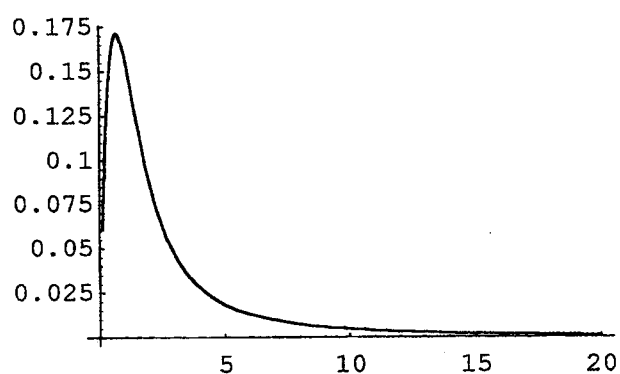
$f[x_] = x^2 (-1 + (1 + x^2) / \sqrt{x^4 + 2 x^2})$

Out[1]=

$$x^2 \left(-1 + \frac{1 + x^2}{\sqrt{2 x^2 + x^4}} \right)$$

In[2]:=

Plot[f[x], {x, 0.1, 20}]



Out[2]=

-Graphics-

In[4]:=

Integrate[f[x], {x, 0, Infinity}]

Out[4]=

$\frac{\sqrt{2}}{3}$

e) O Hamiltoniano (3) na forma diagonal fica

$$\mathcal{H} = E_0 + \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}}' E_{\vec{k}} (\alpha_{\vec{k}}^{\dagger} \alpha_{\vec{k}} + \alpha_{-\vec{k}}^{\dagger} \alpha_{-\vec{k}})$$

com
$$E_{\vec{k}} = \sqrt{(\epsilon_{\vec{k}}^{(0)} + Gn)^2 - (Gn)^2}$$

Se $\epsilon_{\vec{k}}^{(0)} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$, temos

$$E_{\vec{k}} = \sqrt{\epsilon_{\vec{k}}^{(0)2} + 2Gn \epsilon_{\vec{k}}^{(0)}} = \sqrt{\frac{\hbar^4}{4m^2} k^4 + \frac{\hbar^2 Gn}{m} k^2}$$

i) Para baixas energias, $kR \ll 1$, domina o termo em k^2 :

$$k \approx 0, \quad E_k \approx \hbar \left(\frac{Gn}{m} \right)^{1/2} k,$$

que é característico de uma onda de som com velocidade

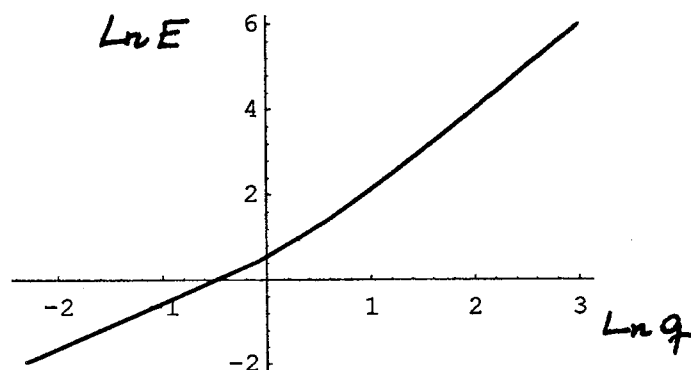
$$v = \left(\frac{Gn}{m} \right)^{1/2}$$

ii) Para altas energias, $k \rightarrow \infty$, domina o termo em k^4 , e

$$E_k \underset{k \rightarrow \infty}{\approx} \frac{\hbar^2}{2m} k^2, \quad \text{tipo partícula livre.}$$

In[2]:=

```
ParametricPlot[{Log[x], h[x]}, {x, 0.1, 20.}]
```



Out[2]=

-Graphics-

Grafico de Log[E(q)/Gn] v.s. Log(q)

-Graphics-

Grafico de Log [E(k)/Gn] v.s Log(k)

```
Plot[g[x], {x, 0.1, 20}]
```

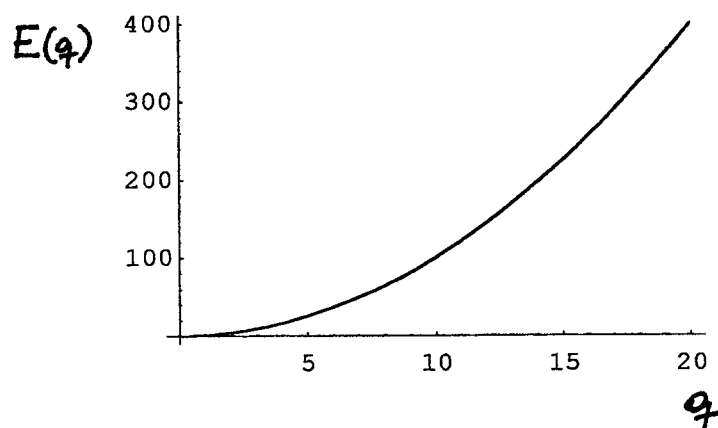


Grafico de E(k) v.s. k

```
s[x_]:=If[x<2,1,0]
```

```
If[x < 2, 1, 0]
```

► Def : $q \equiv \frac{\hbar}{(2mGn)^{1/2}} k$, $q^2 = \frac{E_k^{(0)}}{Gn} = \frac{\hbar^2}{2mGn} k^2$

$$\frac{E_k}{Gn} = \sqrt{\frac{E_k^{(0)2}}{(Gn)^2} + 2 \frac{E_k^{(0)}}{Gn}} = \sqrt{q^4 + 2q^2}$$

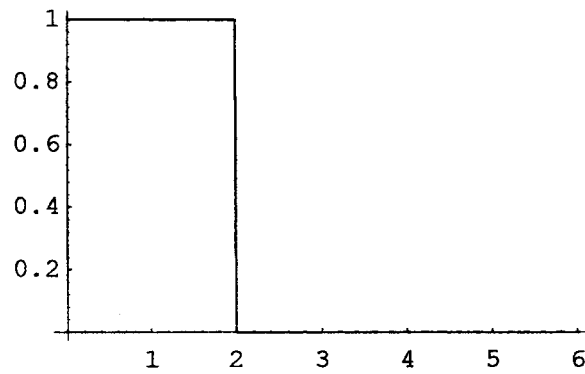
Dos gráficos em anexo, vemos que a passagem do regime de fônons para o de partícula livre se dá suavemente, sem nenhum mínimo no espectro. Experimentalmente, observa-se um mínimo associado com excitações características dos superfluidos chamadas de "rôtons". Na teoria de Bogoliubov, a contribuição de rôtons está ausente, mas a teoria tem o grande mérito de prever "ondas de som" como excitação de mais baixa energia. A parte de rôton pode ser re-obtida, lembrando que existe um cutoff para a constante G , como mostrado neste mesmo problema.

O cutoff mais simples é introduzido como uma função degrau, o que já mostra a assinatura característica dos rôtons (ver gráfico em anexo). Finalmente, se o corte não é feito com uma função degrau, mas esta varia suavemente em torno do cutoff, obtemos o espectro característico das excitações de um superfluido (ver gráfico na pág. LB 29 e 30).

Referências

- L. D. Landau, J. Phys. USSR 5, 71 (1941) [JETP 11, 592 "The Theory of Superfluidity of Helium II" (1941)]
- N. N. Bogolubov, "On the theory of Superfluidity", J. Phys. (USSR) 11, 23 (1947)

```
Plot[s[x],{x,0,6}]
```

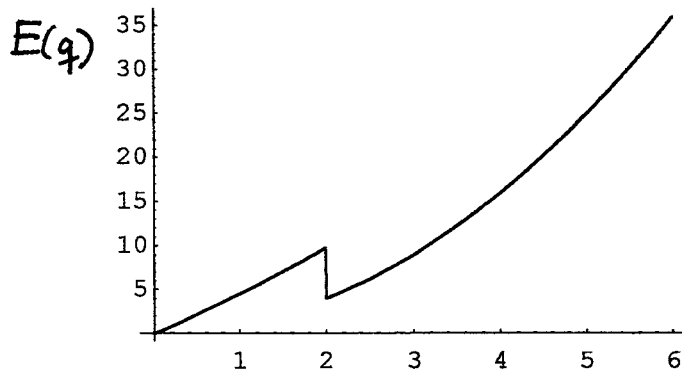


-Graphics-

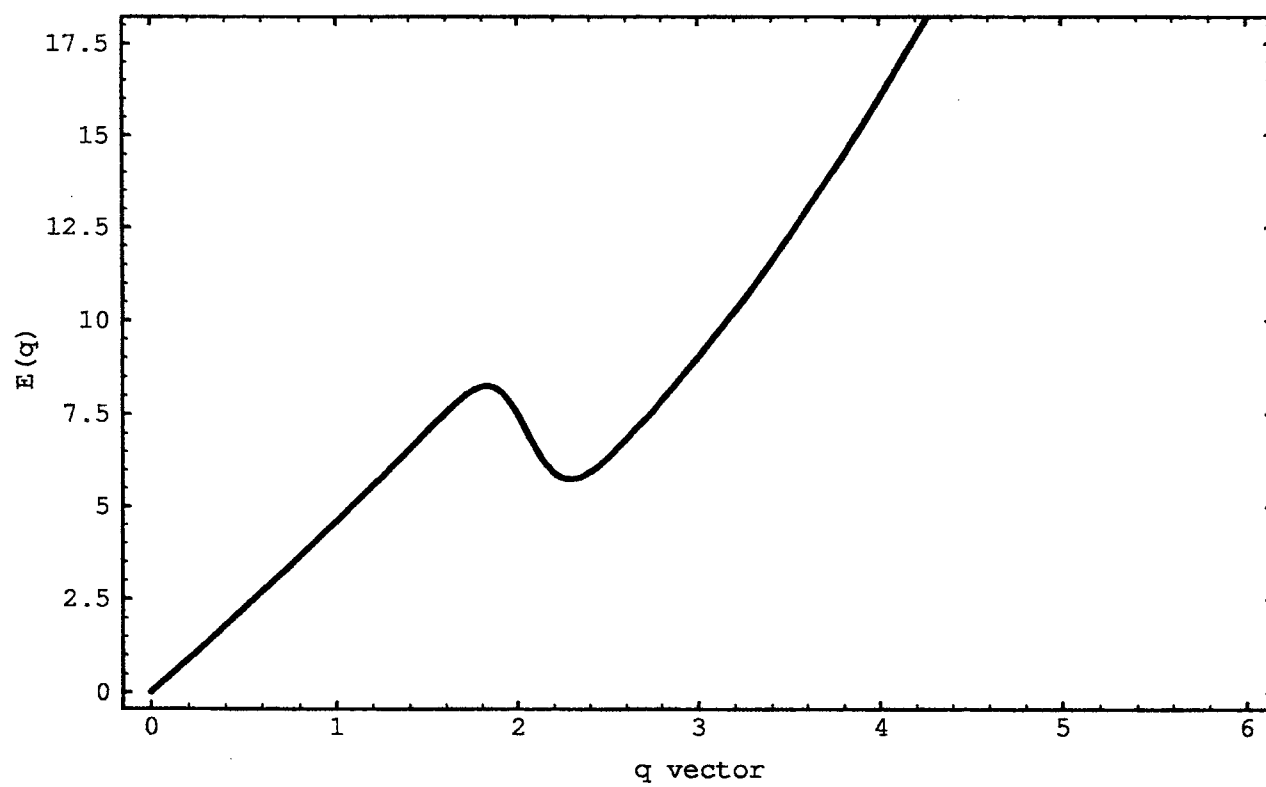
```
g1[x_,a_]=Sqrt[x^4+2 a s[x]*x^2]
```

```
Sqrt[x^4 + 2 a x^2 If[x < 2, 1, 0]]
```

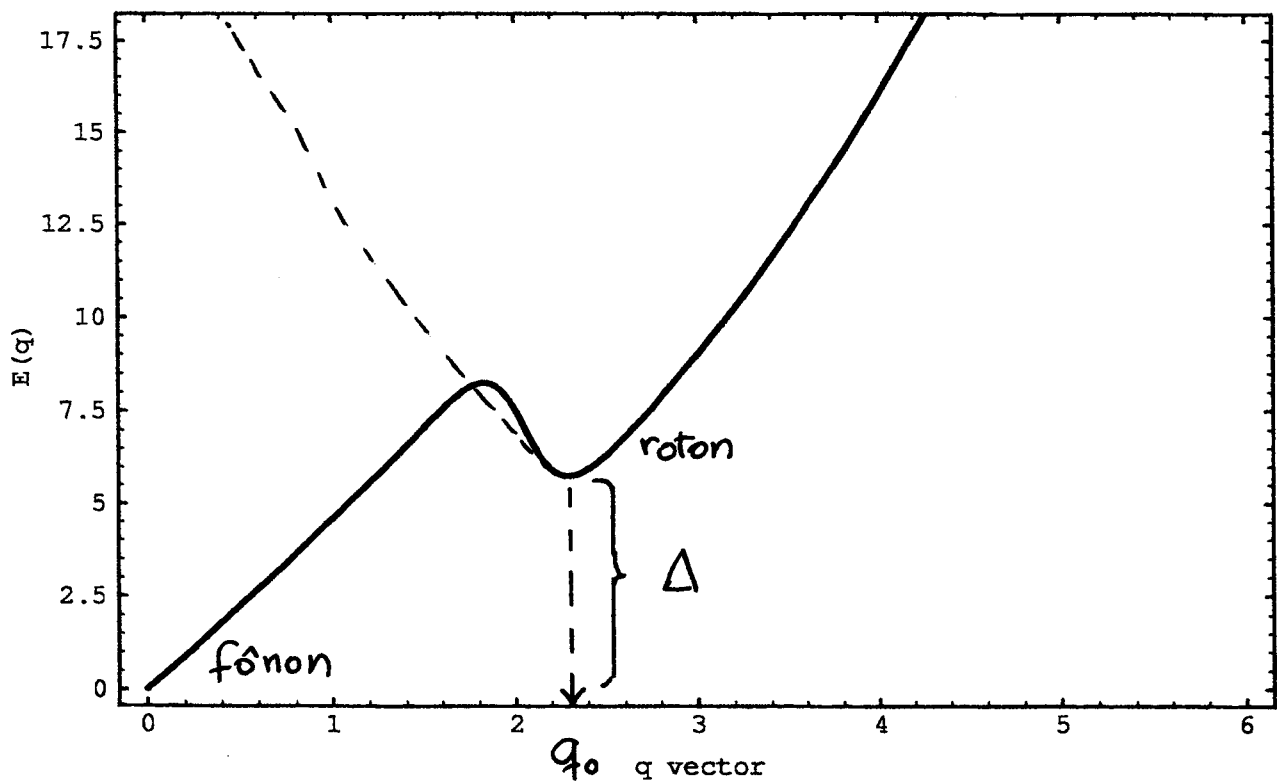
```
Plot[g1[x,10], {x,0, 6}]
```



q



Este tipo de espectro foi conjecturado por Landau (1941) para explicar as propriedades superfluidas do He II : ondas de som para q pequeno, espectro de partícula livre para q grande e um mínimo no meio (de altura Δ) associado a excitações chamadas de 'rotons' por Landau:



$$E(\vec{k}) = \begin{cases} \hbar v k, & \text{para } |\vec{k}| < q_0, \text{ fônons,} \\ \Delta + \frac{\hbar^2}{2m^*} (\vec{k} - \vec{q}_0)^2, & |\vec{k}| \geq q_0, \text{ rotons.} \end{cases}$$

Valores experimentais medidos para as parâmetros são
(espalhamento de neutrons inelástico)

$$k_0 = \frac{p_0}{\hbar} = (1.92 \pm 0.01) \text{ \AA}^{-1}$$

$$\frac{\Delta}{k_B} = (8.65 \pm 0.04) ^\circ \text{ K}$$

$$m^* = (0.16 \pm 0.01) m_{\text{He}^4}$$

A inclinação inicial da curva para a velocidade do som fornece

$$v \approx (239 \pm 5) [\text{m/seg}]$$

a temperatura $T = 1.1 ^\circ \text{ K}$.

Fonte: R.J. Donnelly, "Experimental Superfluidity",
(Chicago Press)

§ Condição para a Superfluidez (L.D. Landau, 1941)

Mostraremos agora que o espectro de excitações obtido para o líquido de Bose implica propriedades superfluidas. O argumento é devido a Landau.

- Def. Uma maneira de definir a superfluidez:
"Objetos podem mover-se através do fluido sem resistência nem arrasto".

Empiricamente sabemos que esta propriedade só é válida para velocidades relativas abaixo de um determinado valor crítico.

A $T=0^\circ\text{K}$, o estado fundamental do superfluido é pensado como um condensado (incompleto) de Bose. Este estado fundamental é o vácuo das excitações (sejam fônons ou rotons):

$$\alpha_{\vec{k}} |\Psi_0\rangle = 0.$$

O condensado é despovoado criando excitações acima do estado fundamental, isto é

$$\alpha_{\vec{k}}^+ |\Psi_0\rangle = |\Psi_e; \vec{k}\rangle, \text{ com energia } E(\vec{k}).$$

Estas excitações produzem o retardamento do movimento do objeto, o qual experimenta atrito como num fluido normal.

Consideremos um objeto (ion ou neutron) de massa M , energia E e momentum $\vec{P}$, movimentando-se através de He II a $T=0^\circ\text{K}$. O corpo perderá energia e momentum para o fluido, se uma excitação de momentum $\vec{p}$ e energia $E(\vec{p})$ for criada. Sejam E' e $\vec{P}'$ a energia e o momentum do objeto depois de criar uma excitação:

conservação $\begin{cases} E = E' + E(p), \\ \vec{P} = \vec{P}' + \vec{p}, \end{cases}$

da 2ª obtemos : $(\vec{P} - \vec{p})^2 = \vec{P}'^2$

$$\vec{P}^2 + \vec{p}^2 - 2\vec{p} \cdot \vec{P} = \vec{P}'^2 \Rightarrow \vec{p} \cdot \vec{P} = \frac{1}{2}(\vec{P}^2 + \vec{p}^2 - \vec{P}'^2).$$

Supondo que a energia da partícula-objeto é:

$$E = \text{cte.} + \frac{\vec{P}^2}{2M},$$

$$\frac{1}{2}\vec{P}^2 - \frac{1}{2}\vec{P}'^2 = M(E - E') = M E(p),$$

e assim obtemos:

$$\vec{p} \cdot \vec{P} = pP \cos \theta = \frac{\vec{P}^2}{2} + M E(p)$$

ou

$$p M V \cos \theta = \frac{p^2}{2} + M E(p)$$

$$V \cos \theta = \frac{p}{2M} + \frac{E(p)}{p}.$$

Como $\cos \theta \leq 1$, obtemos a condição de Landau:

$$\boxed{V \geq \frac{E(p)}{p} + \frac{p}{2M}} \quad (*)$$

Portanto, a conservação de energia e momentum fornecem uma velocidade mínima do objeto para criar uma exci-

tação de momentum $\vec{p}$ e energia $E(\vec{p})$ no superfluido. Para velocidades inferiores ao limite, a partícula se movimenta sem atrito. Examinemos o limite da velocidade ('crítica'). Supondo a partícula massiva, podemos negligenciar o 2do. termo em (*)

$$V \geq \frac{E(\vec{p})}{p} \quad (**)$$

Lembramos que a energia das excitações pode ser aproximada por dois ramos: fônons e rotons.

Def. Velocidade crítica, V_c

$$V_c \equiv \text{Min} \left[\frac{E(\vec{p})}{p} \right]$$

Obtemos então, duas soluções para V_c :

(i) fônons : $E_f(\vec{p}) = v_1 p$,

onde v_1 é a velocidade do som ("first sound"):

$$v_1 = \left(\frac{G \eta}{m_{He}} \right)^{1/2} \approx 240 \left(\frac{m}{\text{seg}} \right).$$

Portanto, a velocidade crítica para produzir um fónon é

$$V_c = v_1.$$

Isso é, para produzir fônons no superfluido a partícula tem que movimentar-se com velocidades 'supersônicas'.

(ii) Experimentalmente, se observa o aparecimento de atrito a velocidades muito menores, portanto devemos examinar o ramo de rotons:

$$E_r(\vec{p}) = \Delta + \frac{1}{2m^*} (p - p_0)^2$$

Em geral, procuramos o mínimo para $\frac{E(\vec{p})}{p}$:

$$\frac{d}{dp} \left[\frac{E(\vec{p})}{p} \right] = 0 = \frac{p}{p^2} \left[\frac{dE(p)}{dp} \right] - \frac{E(p)}{p^2}.$$

Notar que a relação de dispersão é isotrópica,

$$E(\vec{p}) = E(|\vec{p}|).$$

A condição de mínimo fornece:

$$\left[\frac{dE(p)}{dp} \right] \cdot p = E(p),$$

que tem que ser resolvida para p . Uma solução trivial é a já encontrada para fônons. A construção geométrica da solução é o ponto de contato de uma reta que passa pela origem e é tangente à curva de dispersão. A solução de rotons é ligeiramente maior que p_0 , que dá a posição do mínimo (ver figura anexa). - Derivando obtemos:

$$p \left(\frac{\partial E}{\partial p} \right) = p \frac{(p-p_0)}{m^*} = E(p) = \Delta + \frac{(p-p_0)^2}{2m^*},$$

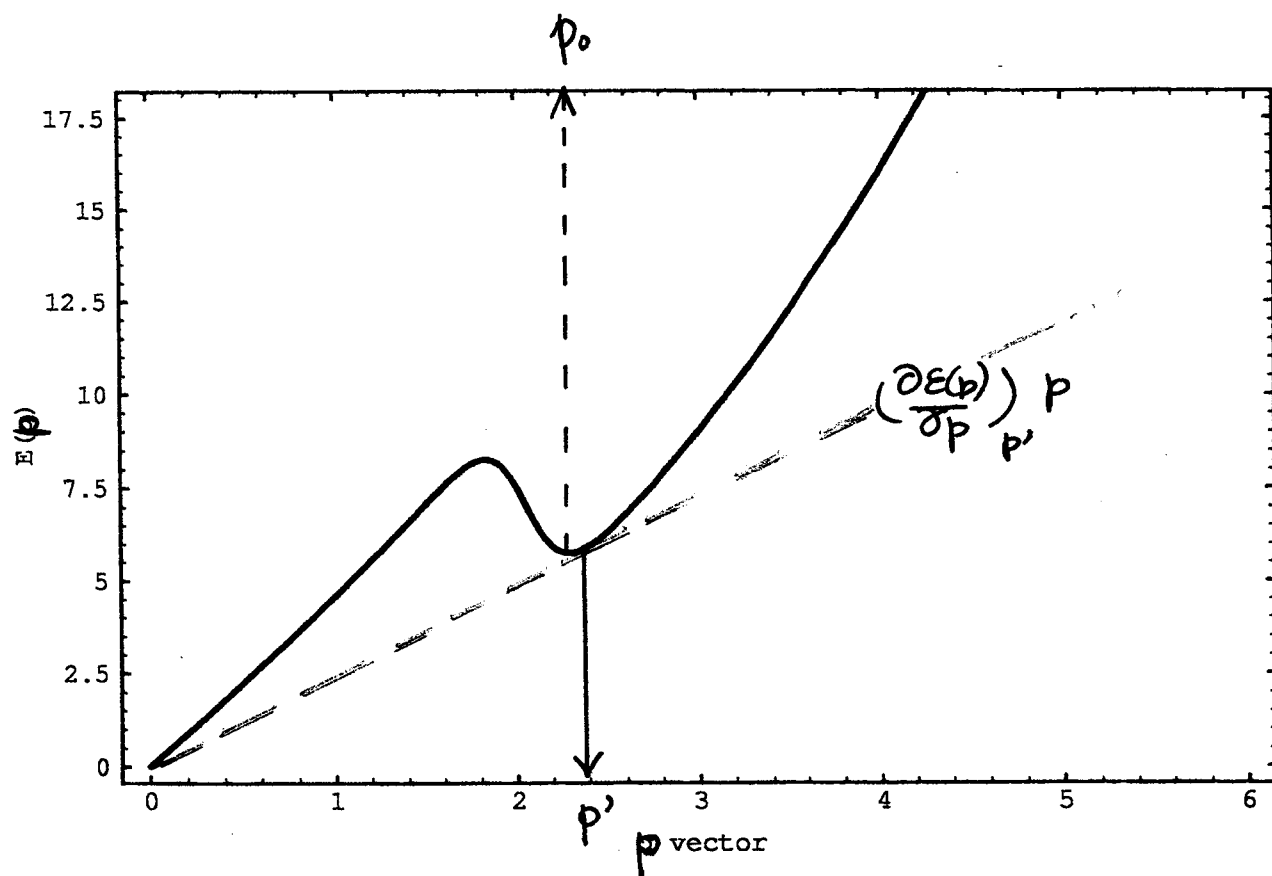
cuja solução p' é:

$$p'^2 = p_0^2 + 2m^* \Delta$$

$$p' = \sqrt{p_0^2 + 2m^* \Delta}$$

$$\left[\frac{E(p)}{p} \right]_{\min} = \frac{\Delta}{\sqrt{p_0^2 + 2m^* \Delta}} + \frac{1}{2m^*} \frac{(\sqrt{p_0^2 + 2m^* \Delta} - p_0)^2}{\sqrt{p_0^2 + 2m^* \Delta}}.$$

Dos parâmetros medidos para o He II, temos que:



$$p_0^2 \gg m^* \Delta .$$

Assim expandimos as raízes como:

$$\begin{aligned} \sqrt{p_0^2 + 2m^* \Delta} &= p_0 \sqrt{1 + \frac{2m^* \Delta}{p_0^2}} \approx p_0 \left(1 + \frac{m^* \Delta}{p_0^2}\right) \\ &\approx \frac{p_0}{1 - \frac{m^* \Delta}{p_0^2}} . \end{aligned}$$

Obtemos a velocidade crítica:

$$V_c = \left[\frac{\mathcal{E}(p)}{p} \right]_{\min} \approx \frac{\Delta}{p_0} \left(1 - \frac{m^* \Delta}{2p_0^2}\right) \approx 50 \left(\frac{\text{m}}{\text{seg}}\right) ,$$

que está em bom acordo com o que é medido em experiências.
É claro que em capilares a velocidade crítica é menor e é função do tamanho do canal.